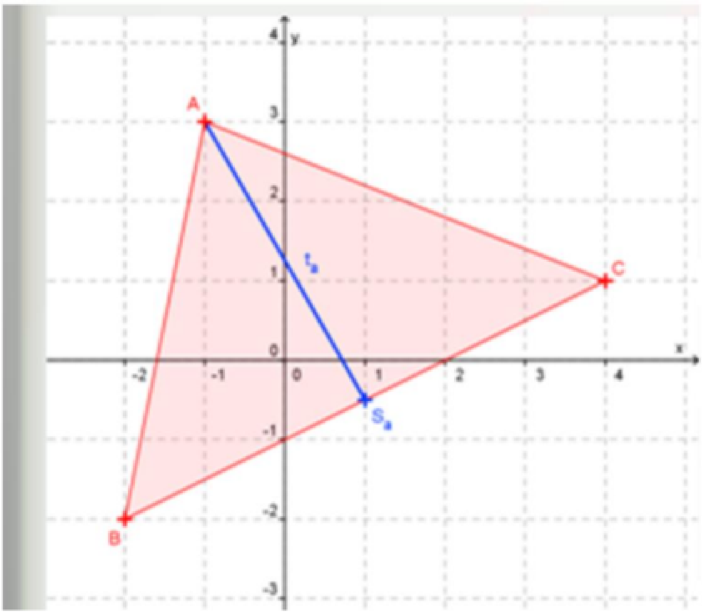
Skalární součin vektorů

Mgr. Luboš Velfl

VY_32_INOVACE_MA.4.sada.3.09

- Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0933
- Šablona: III/2 Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
- Ověřeno ve výuce dne: 18. 10. 2012   Třída: 4. ZL
- Název materiálu: Skalární součin vektorů
- Předmět: Matematika   Ročník: 4.
- Autor: Mgr. Luboš Velfl
- SZŠ a VOŠZ Příbram, Jiráskovy sady 113

Vypočítejte délku těžnice ta trojúhelníku ABC viz příloha s využitím středu úsečky a délky úsečky



Př.:

$\vec{u} = (2; 3) \quad \vec{v} = (-1, -2)$

$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2) = (2 + (-1); 3 + (-2)) = (1; 1)$

$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2) = (2 - (-1); 3 - (-2)) = (3; 5)$

$-2\vec{u} = ((-2) \cdot u_1; (-2) \cdot u_2) = ((-2) \cdot 2; (-2) \cdot 3) = (-4; -6)$

Skalární součin vektorů

Skalární součin vektorů:

Skalární součin dvou vektorů $\vec{u} = (u_1; u_2)$, $\vec{v} = (v_1; v_2)$ v rovině je číslo

$$u_1v_1 + u_2v_2$$

Skalární součin dvou vektorů $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ v prostoru je číslo

$$u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Značíme: $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Cvičení 1:

Vypočtěte skalární součin vektorů $\vec{u} = (2; 4; -1)$ $\vec{v} = (-2; 1; 5)$

Řešení:

$$\vec{u}\ \vec{v} = 2.(-2) + 4.1 + (-1).5$$
$$\vec{u}\ \vec{v} = -4 + 4 - 5$$
$$\vec{u}\ \vec{v} = -5$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} =$$
$$= u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 =$$
$$= 2\cdot(-2) + 4\cdot 1 =$$
$$= -4 + 4 = \underline{\underline{0}}$$

Cvičení 2: Počítejte samostatně

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$

Vypočtěte skalární součin vektorů $\vec{u}$ $\vec{v}$

a) $\vec{u} = (3; 2)$, $\vec{v} = (-3; -2)$ -13

b) $\vec{u} = (-2; 5)$, $\vec{v} = (2 ; -1)$ - 9

c) $\vec{u} = (1; -1; 1)$ $\vec{v} = (-2; 2; -2)$ - 6

d) $\vec{u} = (1; 1; 3)$, $\vec{v} = (3; 1;\ 1)$ 7

Cvičení 2: Počítejte samostatně

Vypočtěte skalární součin vektorů $\vec{u}$ $\vec{v}$

a) $\vec{u}$ = (3; 2), $\vec{v}$ = (-3; -2) -13

b) $\vec{u}$ = (-2; 5), $\vec{v}$ = (2 ; -1) - 9

c) $\vec{u}$ = (1; -1; 1) $\vec{v}$ = (-2; 2; -2) - 6

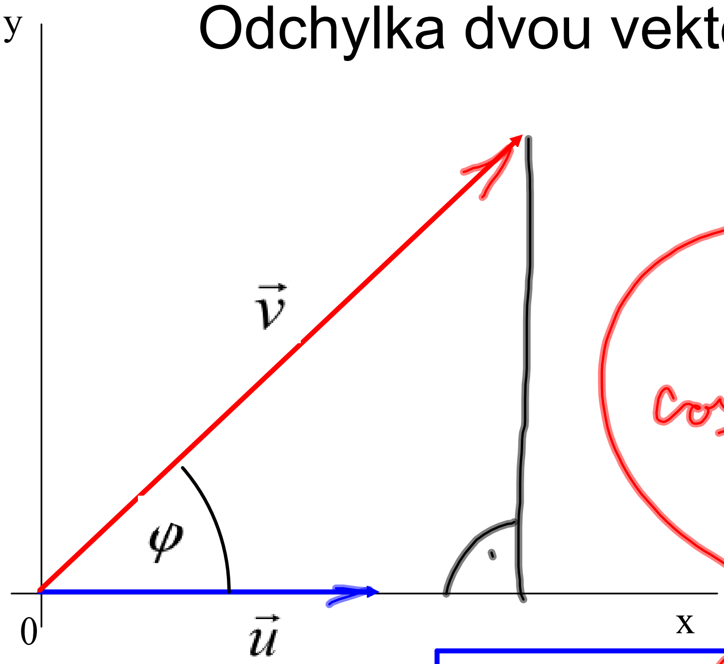
d) $\vec{u}$ = (1; 1; 3), $\vec{v}$ = (3; 1; 1) 7

Vlastnosti skalárního součinu

Pro každé vektory u, v, w (v rovině nebo v prostoru)
a každé
reálné číslo c platí:

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$$
$$(c.\vec{u}).\vec{v} = c.(\vec{u}.\vec{v})$$
$$\vec{w}(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w}\vec{u} + \vec{w}\vec{v}$$

Odchylka dvou vektorů:

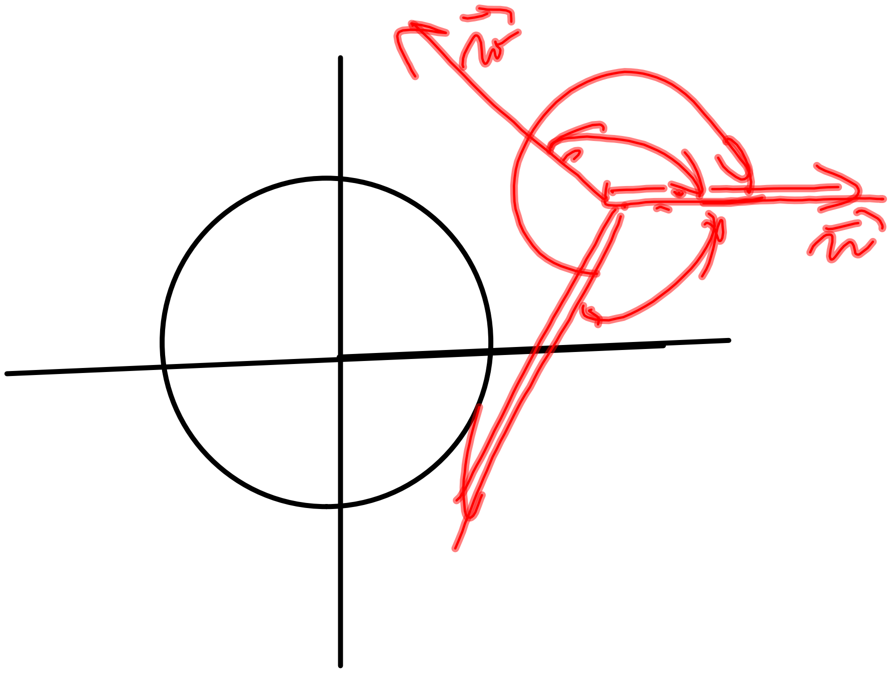


autor obr. Mgr. L.Velfl

$$\cos\varphi = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

Skalární součin $\vec{u} \,.\, \vec{v} = 0$ právě tehdy, je-li buď alespoň jeden z vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ nulový vektor, nebo jsou oba vektory nenulové a navzájem kolmé.



Cvičení 3:

Vypočítejte úhel dvou vektorů $\vec{u}$ $\vec{v}$ jestliže $\vec{u}$ = (1; -2), $\vec{v}$ = (2;1)

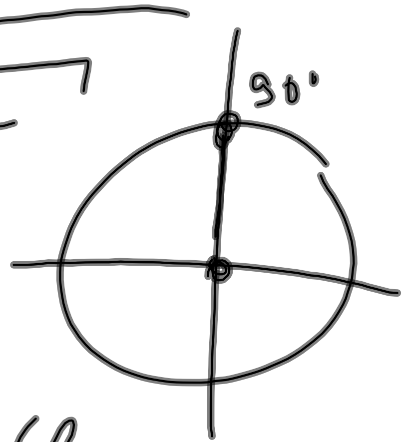
$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

$$\cos\varphi = \frac{u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 2 + (-2)\cdot 1}{\sqrt{1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{2 + (-2)}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}$$

$$\cos\varphi = \frac{0}{\sqrt{5\cdot 5}}$$



$$\cos\varphi = \frac{0}{5}$$

$$\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi$$

Cvičení 3:

Vypočítejte úhel dvou vektorů $\vec{u}$ $\vec{v}$ jestliže $\vec{u}$ = (1; -2), $\vec{v}$ = (2;1)

Řešení:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{|u|.|v|}$$

$$\cos\varphi = \frac{1.2+(-2).1}{\sqrt{1^2+2^2}.\sqrt{(-2)^2+1^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{0}{\sqrt{5}.\sqrt{5}}$$

$$\cos\varphi = 0$$

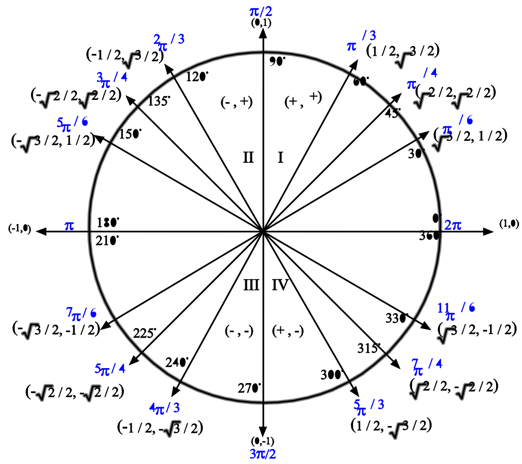
$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Cvičení 4:

Určete vektor v, který má velikost $|\mathbf{v}| = 5$ a je kolmý k vektoru u = (16; 12).

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|u|.|v|}}$$

$$\cos\varphi = 0$$



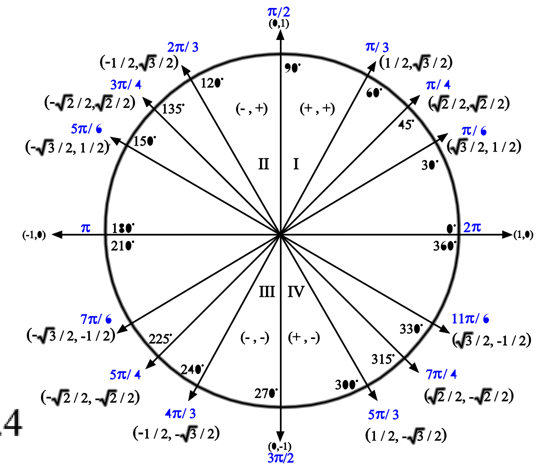
obr. z Galerie Smart Notebook

Cvičení 4:

Určete vektor $\vec{u}$ který má velikost $|\mathbf{v}| = 5$ a je kolmý k vektoru $\vec{v}$ = (16; 12).

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|u|.|v|}}$$

$$\cos\varphi = 0$$



obr. z Galerie Smart Notebook

Řešení:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|u|.|v|}$$

$$\cos\varphi = \frac{16.v_1 + 12.v_2}{\sqrt{16^2 + 12^2}.5}$$

a)

$$0 = 16.3 + 12.(-4)$$

$$0 = 0$$

$$5 = \sqrt{v_1{}^2 + v_2{}^2}$$

$$25 = 3^2 + (-4)^2$$

$$v_1 = 3$$

$$v_2 = -4$$

b)

$$0 = 16.(-3) + 12.4$$

$$0 = 0$$

$$5 = \sqrt{v_1{}^2 + v_2{}^2}$$

$$25 = (-3)^2 + 4^2$$

$$v_1 = -3$$

$$v_2 = 4$$

$\vec{m}: A=[2;3]$ $B=[-1;-3] \Rightarrow \vec{m}=B-A=\underline{\underline{(-3;-6)}}$

$\vec{v}: C=[1;4]$ $D=[2;-1] \Rightarrow \vec{v}=D-C=\underline{\underline{(1;-5)}}$

$\vec{m}+\vec{v}=(m_1+v_1;m_2+v_2)=(-3+1;-6+(-5))=\underline{\underline{(-2;-11)}}$

$\vec{m}-\vec{v}=(m_1-v_1;m_2-v_2)=(-3-1;-6-(-5))=\underline{\underline{(-4;-1)}}$

$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\vec{v}=\left(\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1;\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-5)\right)=\underline{\underline{\left(-\frac{1}{2};2{,}5\right)}}$

$$\cos\varphi=\frac{\vec{m}\cdot\vec{v}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{v}|}$$

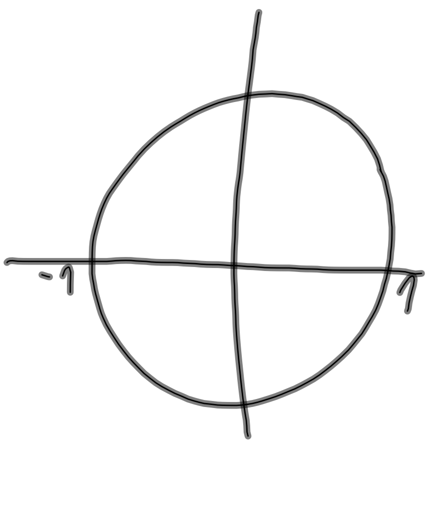
$$\cos\varphi=\frac{m_1\cdot v_1+m_2\cdot v_2}{\sqrt{m_1^2+m_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$$

$$\cos\varphi=\frac{(-3)\cdot 1+(-6)\cdot(-5)}{\sqrt{(-3)^2+(-6)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-5)^2}}$$

$$\cos\varphi=\frac{-3+30}{\sqrt{45}\cdot\sqrt{26}}$$

I II 4

$$\cos\varphi=\frac{27}{\sqrt{1170}}$$



$\cos\varphi=0{,}7894$

$\varphi=\underline{\underline{37^\circ 52'}}$

Metodika (anotace) :

Učební materiál se skládá ze dvou částí:

A) Prezentace (SMART Notebook) - žák se seznámí se skalárním součinem vektoru

B) Praktické úkoly 1 - 4 - žák na základě upevněných znalostí a dovedností určuje

skalární součin vektorů. Výsledky žáka slouží ke kontrole zvládnutí učiva a stane se součástí hodnocení.

Zdroje:

Kočandrle Martin, Boček Ladislav. Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie. Dotisk 3. vydání. Praha: Prometheus, 2004, 220 s. ISBN: 80-7196-163-9